Übungsstunde Analysis 2:

Heutige Themen:

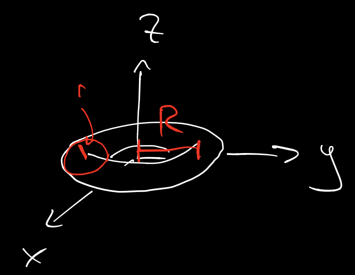
- Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten (Umfkt)
  - ↳ Satz vom regulären Wert
- Extrema unter Nebenbedingungen
  - ↳ Lagrange Multiplikatoren

Differenzierbare Umfkt.:

Bisher: Analysis auf $\mathbb{R}^n$

Neu: Analysis auf

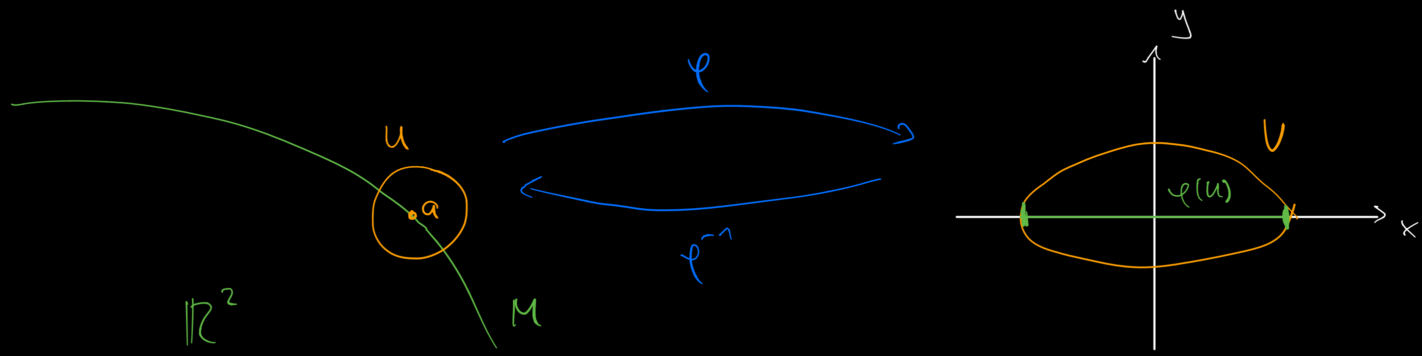
- Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$
- Parabel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$
- Torus $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$



Def.: Eine nicht leere Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst d-dimensionale diffbare Umfkt. des $\mathbb{R}^n$, falls es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^d_0 \cap V$$

mit $\mathbb{R}^d_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_{d+1} = x_{d+2} = \dots = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$



Notation:

- φ heisst <u>Karte</u> ("Flachmacher") für M (in a) und $M \cap U$ heisst <u>Kartengebiet</u>.
- Sei $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Karten $\varphi_i : U_i \to V_i$. Die Familie heisst <u>Atlas</u> für M, falls $\bigcup_{i \in I} U_i \supset M$

<u>Bsp.</u>: Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. M sei eine Umfkt. des $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1. Wir wählen dazu die Karte

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^2}_{=U} \to \underbrace{\mathbb{R}^2}_{=V} : \varphi(x,y) = (x, y - x^2)$$

Dann ist $M \cap U = M$ und für $(x, x^2) \in M$: $\varphi(x, x^2) = (x, 0) \in \mathbb{R}^1_0 \subset \mathbb{R}^2$

<u>Satz</u>: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ $(M \neq \emptyset)$ ist genau dann eine Umfkt. der Dimension d, falls es zu jedem Punkt $a \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a gibt, und $(n-d)$ C^1-Funktionen $f_1, f_2, \dots, f_{n-d} : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned}
&(i)\ M \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0\} \\
&(ii)\ df_1(a), df_2(a), \dots, df_{n-d}(a) \text{ sind linear unabhängig} \\
&\quad (\Leftrightarrow \nabla f_1(a), \nabla f_2(a), \dots, \nabla f_{n-d}(a) \text{ sind lin. unabh.})
\end{aligned} \tag{1}$$

<u>Def</u>: Ein Punkt $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ heisst <u>regulärer Punkt</u> der diffbaren Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$, falls

$$df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

surjektiv ist.

$y \in \mathbb{R}^m$ heisst <u>regulärer Wert</u>, falls alle $x \in f^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = y\}$ im Urbild reguläre Punkte sind.

Satz vom regulären Wert: Wichtigstes Tool um Umfkt. zu erkennen!

Sei $f: U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung und sei $c \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer
$\subset \mathbb{R}^n$ offen

Wert von f. Dann ist die Niveaumenge $M = f^{-1}(c)$ eine Umfkt. des

$\mathbb{R}^n$ der Dimension $d = n - m$, falls $M \neq \emptyset$.

Bsp:

$M^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 1\}$ ist eine Umfkt der Dimension $n-1$.

$M^{n-1} = f^{-1}(1)$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

Zu zeigen: 1 ist ein regulärer Wert von f.

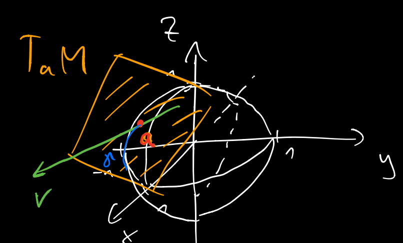
$df(x) = [2x_1 \quad 2x_2 \quad \dots \quad 2x_n] = 2x^T$ surjektiv $(\neq 0)$

$\forall x \neq 0$. $\qquad f(0) = 0 \neq 1$ $\quad \to$ Müssen nicht wissen, welche x auf 1 abgebildet werden! überprüfen einfach kritische Pkt.

$\Rightarrow$ 1 ist regulärer Wert

$\Rightarrow M^{n-1}$ ist tatsächlich eine Umfkt.

Der Tangentialraum:



Def.:

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heisst Tangentialvektor an $M \subset \mathbb{R}^n$ im Punkt $a \in M$, falls es eine C^1-Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, so dass $\dot\gamma(0) = v$ und $\gamma(0) = a$. $T_aM :=$ Menge aller Tangentialvektoren.

Satz: Sei M eine d-dimensionale Umfkt. des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt in jedem $a \in M$:

(i) T_aM ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dim. d, der Tangentialraum an M in a.

(ii) Ist in einer Umgebung U von a die Mfkt. M definiert durch C^1-Abb. $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-d} \end{bmatrix} : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ wie im Satz (1), so gilt:

$$T_a M = \mathrm{Kern}(df(a)) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid df_1(a)v = 0, \dots, df_{n-d}(a)v = 0 \}$$

$$= \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla f_1(a), v \rangle = \dots = \langle \nabla f_n(a), v \rangle = 0 \}$$

Bemerke: Die Matrix $df(a)$ muss definitionsgemäss vollen Rang haben, kann aber mehr Spalten als Zeilen haben, der Kern von $df(a)$ ist also nicht zwingend leer!

Extremas unter Nebenbedingungen:

Aufgabe: Gegeben $f: U \to \mathbb{R}$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_k : U \to \mathbb{R}$ Nebenbedingungen.
Finde das Min/Max. von f auf $M = \{ x \in U \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_k(x) = 0 \}$

Die Lagrange Multiplikatoren:

Seien $f: \underset{\subset \mathbb{R}^n \text{ offen}}{U} \to \mathbb{R}$ und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : U \to \mathbb{R} \in C^1$. Die Matrix $\varphi'(x)$ habe in jedem $x \in M = \varphi^{-1}(0)$ den Rang k.

Dann gilt:

Ist $x_0 \in M$ ein (lokaler) Extremalpunkt von f auf M, so ist $df(x_0)$ eine Linearkombination von $\varphi_1'(x_0), \dots, \varphi_k'(x_0)$, d.h. $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (Lagrange Multiplikatoren) so dass

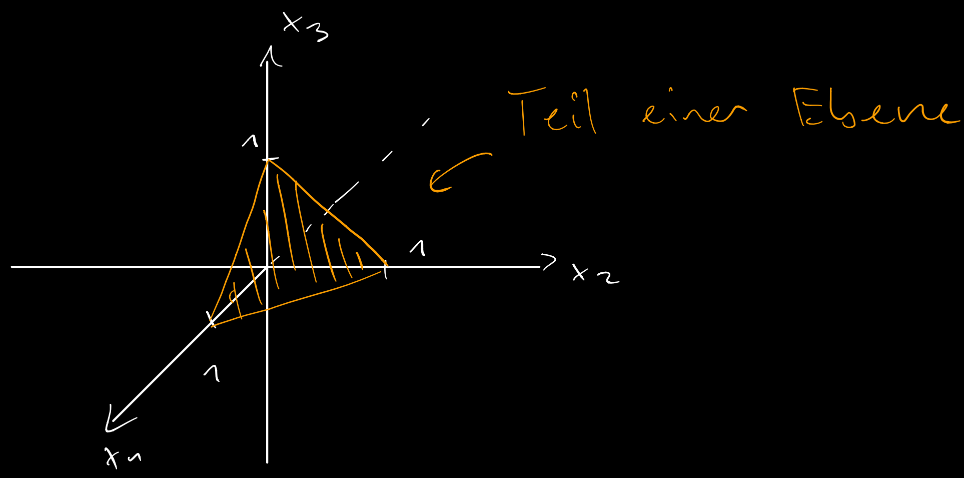
$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i'(x_0) \qquad (i)$$

$$\iff \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla \varphi_i(x_0) \qquad (ii)$$

Wir nutzen nun diesen Zusammenhang aus, um die Extremalstelle x_0 & den Extremalwert zu finden

Bsp.: Berechne das Maximum von $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$

auf $M = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1,\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$



Bem.: Wichtig für alle Extremalwertaufgaben mit Nebenbedingungen ist, dass wir sowohl den Rand als auch das Innere der durch die NB beschriebenen Menge betrachten! Das Extremum kann durchaus auf dem Rand angenommen werden.

▷ Auf dem Rand: mind. ein $x_i = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$\rightsquigarrow$ kein Maximum

▷ Im Innern $\tilde{M} \subset M$:

Lagrange Mult.: $\nabla f = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \cdots x_n \\ x_1 x_3 \cdots x_n \\ \vdots \\ x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \end{bmatrix} = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}, \quad \nabla \varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \nabla f = \lambda \cdot \nabla \varphi \quad (+ \mu \nabla h + \eta \nabla k)$ Falls weitere Nebenbedingungen h & k vorhanden.

$$\Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (i)$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \qquad (ii)$$

$$(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0)$$

Bem.: (ii) garantiert uns, dass wir das Maximum wirklich auf der Umfkt. M suchen, vergesst diese NB also nie!

$\Rightarrow$ (i) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c$ $\rightarrow$ Da in jeder Mult. ein anderes x_i fehlt, sie aber immer λ ergeben.

(ii) $c + c + \ldots + c = 1$

$n \cdot c = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c = \frac{1}{n}}}$ Extremalstelle

$\Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{n^n}}}$ Extremalwert

Satz vom Maximum und Minimum:

Sei $f: X \to \mathbb{R}$ stetig und X kompakt (abgeschlossen & begrenzt). Dann nimmt f auf X ein Minimum und ein Maximum an.

Bem.: Üblicherweise überprüft man am Anfang der Aufgabe, ob überhaupt ein Extremum existiert, ansonsten ist der gesamte Aufwand vergebens.